GEMENGDE VERZEKERING MET EEN WINSTDELINGSOPTIE

Een praktische uitwerking

Wietze Lei
Voorjaar 2009

Begeleider: Prof. dr. A.A.J. Pelsser
Universiteit van Amsterdam.

Actuarieel Bureau Wietze Lei
W. Lei AAG
www.abwl.nl
wietze@abwl.nl

Studentnummer: 8958807
Universiteit van Amsterdam
4 juni 2009

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord en dankwoord

Op 18 juni 1992 werd mij door wijlen Theo van den Heiligenberg het diploma Actuaris met nummer 128 uitgereikt. Ik had in die 7 jaar daarvoor met goed gevolg de opleidingen Actuarieel Rekenaar (1985) en Kandidaat Actuaris (1989) via de stichting BUOAW[1] afgelegd en de afronding aan de Universiteit van Amsterdam (UvA), onder auspiciën van de stichting, vormde het sluitstuk van de opleiding.

Vanaf dat moment ging ik door het "actuariële leven" met een waardevol diploma. Deels door mijn ijdelheid, maar ook door mijn drang naar kennis en niet te vergeten de vergaring van PE-punten, besloot ik in 2006 alsnog mijn universitair diploma te halen. Het zou geen drs.-titel meer worden maar een Master of Science. Na dankbaar lobbywerk van Rob Kaas besloot de examencommissie van de Faculteit der Economische Wetenschappen en Econometrie dat een mastersprogramma van 60 ects voldoende zou zijn.
Begin 2007 heb ik mij opnieuw laten inschrijven aan de UvA.

In iets meer dan een jaar wist ik de 6 vakken te behalen, en tezamen met de twee vrijstellingen hoefde ik alleen nog maar een scriptie te maken. Maar zoals veel studenten dat kunnen beamen, vergde dat meer tijd dan gepland. Met name het startmoment werd alsmaar uitgesteld. Uiteindelijk heb ik toch een start gemaakt en na het eerste gesprek met Antoon Pelsser in september 2008, duurde het nog tot begin dit jaar alvorens ik goed en wel aan de slag ging.

Voor u ligt een scriptie waar ik over het algemeen met veel plezier aan gewerkt hebt, en waar ik met een voldaan gevoel doorheen kan bladeren. Ik hoop dat ik met deze scriptie een bijdrage lever aan de waardering van de kosten van overrentewinstdeling op traditionele levensverzekeringen.

Bij dezen bedank ik Antoon Pelsser voor zijn begeleiding en advies.

Verder wil ik Richard Plat bedanken voor het gebruik van zijn artikel en de gegevens van de u-rendementen die hij mij geleverd heeft.

Mijn collegae Willem de Klerk en Konradin Rauh wil ik bedanken voor hun commentaar en voor hun controles op (spel)fouten in eerdere versies van deze scriptie.

Last but not least wil ik mijn vrouw Antine bedanken voor het geduld dat zij wederom wist op te brengen om mij deze studie, naast mijn drukke werk als zelfstandig actuaris, te kunnen laten doen.

[1] BUOAW = Buiten Universitair Onderwijs in de Actuariële Wetenschappen. Deze stichting is de voorloper van het Actuarieel Instituut.

Samenvatting

Voor een gemengde verzekering met overrentewinstdeling op basis van het *u*-rendement kan op een redelijk eenvoudige manier een analytische formule worden opgesteld waarmee het optie-element in deze verzekering bepaald kan worden.

In de literatuur, bijvoorbeeld in John C. Hull' s "Options Futures and Other Derivatives", is veel informatie te vinden over de waardering van interestopties en andere interestderivaten. In deze scriptie wordt een praktische uitwerking gegeven van hoe je de formules toe kunt passen op de winstdelingsoptie. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het gegeven dat de 7 jaars swaprente een goede benadering is voor het *u*-rendement. Toekomstige winstdelingen kunnen dan met een optie (een swaption) op een 7 jaars forward swaprente benaderd worden.
De kosten van de winstdeling worden gesplitst in een intrinsiek deel en een tijdswaarde-effect. Verder wordt onderzocht wat de opslag op de premie moet zijn voor de financiering van dit tijdswaarde-effect, en voor welke variabelen deze tijdswaarde gevoelig is.

Het blijkt dat de volatiliteit van de swaption van grote invloed is op de kostprijs van de optie. Voor een verzekerde van 40 jaar oud, een looptijd van 20 jaar, volatiliteit van 20%, rentestand per december 2008 en winstdeling boven 3,25% bruto rekenrente bedraagt de opslag voor de tijdswaarde ruim 7% van de nettopremie. Indien de volatiliteit stijgt naar 25% bedraagt de opslag al bijna 10%.

In de huidige financiële rumoerige en onrustige markten is een volatiliteit van 20% à 25% geen uitzondering. De kosten van winstdelingsopties of het het afdekken daarvan kunnen dan een behoorlijk beslag leggen op het jaarlijkse resultaat van de verzekeringsmaatschappij.
Deze scriptie kan gebruikt worden als handleiding om de kosten van een overrentewinstdeling op basis van het *u*-rendement te berekenen.

Inleiding

Binnen het levensverzekeringsbedrijf en nog meer binnen het Actuariaat heeft de gemengde verzekering altijd een prominente rol gespeeld. Voor de opkomst van de beleggingsverzekeringen, zo rond het einde van de jaren 80 van de vorige eeuw, was de gemengde verzekering een van de meest verkochte levensverzekeringsproducten. Deze verzekering keert altijd uit, of bij overlijden van de verzekerde, of bij in leven zijn van de verzekerde op de einddatum. Binnen de actuariële opleidingsinstituten was en is de gemengde verzekering nog steeds een geliefd product om de vele facetten van de levensverzekeringswiskunde te doceren. Van de eerste stapjes naar berekening van de nettokoopsom en premie tot uitgebreide winstbronnenanalyses aan toe. Diverse algebraïsche gelijkheden en wetenswaardigheden passeerden de revue. Bijvoorbeeld $A_{x\,\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x\overline{n}|}$ en dan naast een algebraïsch bewijs ook kunnen beredeneren waarom deze gelijkheid waar is. Of bijvoorbeeld de Zweedse methode[2] om snel de Zillmervoorziening te berekenen vanuit de nettovoorziening. ${}_tV^{Zillmer} = (1+\alpha)\ {}_tV^{netto} - \alpha$.

Steevast werd gebruik gemaakt van een vaste rekenrente van 4%. Ook werden de eerste varianten van overrentewinstdeling geïntroduceerd.

Over risico's werd weinig gedoceerd. Duidelijk bleek dat bij de prijsstelling de producten meestal voldoende marge op sterfte hadden, vrijwel zeker verlies op kosten zouden gaan leiden, maar als het echt tegenzat altijd wel weer gered werden door het resultaat op interest. Immers de 4% benodigde rekenrente, min of meer voorgeschreven door de toenmalige Verzekeringskamer, kon door de altijd veel hogere marktrente ruimschoots gerealiseerd worden. Een forse jaarlijkse interestwinst lag dus altijd in het verschiet. Dat een winstdelingsregeling met een 4% minimum rekenrente een garantie is, en dus geld kost, kwam niet ter sprake.

Pas na mijn opleiding tot actuaris en mijns inziens ook naar aanleiding van de rendementsgaranties die op unit linked en universal life producten waren gegeven werd er in bredere kring onder actuarissen nagedacht over de kosten van interestgaranties in traditionele levensverzekeringsproducten. Vanaf dat moment werden ook de eerste berekeningen gemaakt.

De eerste uitkomsten die ik onder ogen kreeg waren de uitkomsten uit een ALM-achtig[3] simulatiemodel waarin enige duizenden scenario's waren doorgerekend en waarin ook de effecten van een overrentewinstdeling met minimum rekenrentegarantie waren verwerkt.

Vanaf mijn eerste kennismaking met deze winstdelingsoptie zijn een aantal zaken mij blijven intrigeren, en dat zijn:

---

[2] Zie De Heer en Sattler. Hoofdstuk 8, §33.

[3] ALM= Asset Liability Modelling of Management

1. Er moet toch een elegantere manier zijn anders dan de botte simulatiemethode om de garantie te waarderen.

2. Wat zijn de echte aanjagers van de kostprijs.

3. Is er een benaderingsformule (binnen eventuele grenzen van de parameters) om de prijs van de optie vast te stellen.

Dit heeft geleid tot de volgende vraagstelling in mijn afstudeerscriptie van de opleiding Master Actuariaat.

Vraagstelling

Maak voor een gemengde verzekering tegen jaarlijkse premiebetaling met een minimum rekenrente van i een analytische uitwerking voor de berekening van de kostprijs van de overrentewinstdeling op basis van het u-rendement.
Onderzoek welke parameters de meeste invloed hebben op de kostprijs van deze optie en onderzoek of er binnen een zeker parameterinterval een benaderingsformule geldig is om een ruwe schatting te geven van de kostprijs van deze optie.

Productbeschrijving

Gemengde verzekering

Een gemengde verzekering is een verzekering die zowel bij overlijden van de verzekerde voor de einddatum als bij in leven van de verzekerde op de einddatum kapitaal *K* uitkeert.
In formule:

$$K\bar{A}_{x\,\overline{n}|} = K\bar{A}^{1}_{x\,\overline{n}|} + K\,{}_{n}E_{x} = K\sum_{t=1}^{n} {}_{t\text{-}1|}q_{x}\cdot v^{t-\frac{1}{2}} + K\,{}_{n}p_{x}\cdot v^{n}$$

Waarbij $v = \frac{1}{1+i}$ en i de rekenrente is, ${}_{n}p_{x}$ de kans dat een x-jarige na n jaar nog leeft en ${}_{t\text{-}1|}q_{x}$ de kans dat een x-jarige in het t^{e} jaar overlijdt. Omdat uitkering direct na overlijden plaatsvindt worden de overlijdenskansen vanaf halverwege het jaar verdisconteerd.

De nettopremie volgt uit het equivalentiebeginsel. Dit beginsel stelt dat de contante waarde van de premies gelijk is aan de contante waarde van de uitkeringen.

$$P^{netto} = \frac{K\bar{A}_{x\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\,\overline{n}|}}\text{, hierbij is } \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n\text{-}1} {}_{t}p_{x}\cdot v^{t}$$

Gemakshalve wordt de kostenopslag voor onder andere administratiekosten en provisie op nul gesteld.

Bij traditionele verzekeringen, zoals een gemengde verzekering, was en is het gebruikelijk om te werken met een vaste rekenrente. Vanaf eind jaren 60 van de vorige eeuw is men langzamerhand overgegaan van een 3% à 3½% rekenrente naar een rekenrente van 4%. In augustus 1999 heeft de toenmalige Pensioen en Verzekeringskamer (thans DNB) nieuwe richtlijnen uitgevaardigd waarin gesteld wordt dat de rekenrente van nieuw afgesloten verzekeringen niet hoger mag zijn dan 3%. Voor bestaande verzekeringen geldt deze beperking niet. De rekenrente mag daarbij 4% blijven. Zelfs voor verhogingen op bestaande polissen mag nog de hogere 4% rekenrente gehanteerd worden.

In deze scriptie worden de kosten van de winstdeling niet verdisconteerd met een vaste rekenrente, maar met een yieldcurve. Dit lijkt op het eerste gezicht tegenstrijdig, maar is het niet. In de polisvoorwaarden is meestal vastgelegd dat de voorziening als maatstaf wordt gebruikt voor de overrentewinstdeling. Vandaar dat zowel een vaste als een variabele rente in de formules voorkomt.

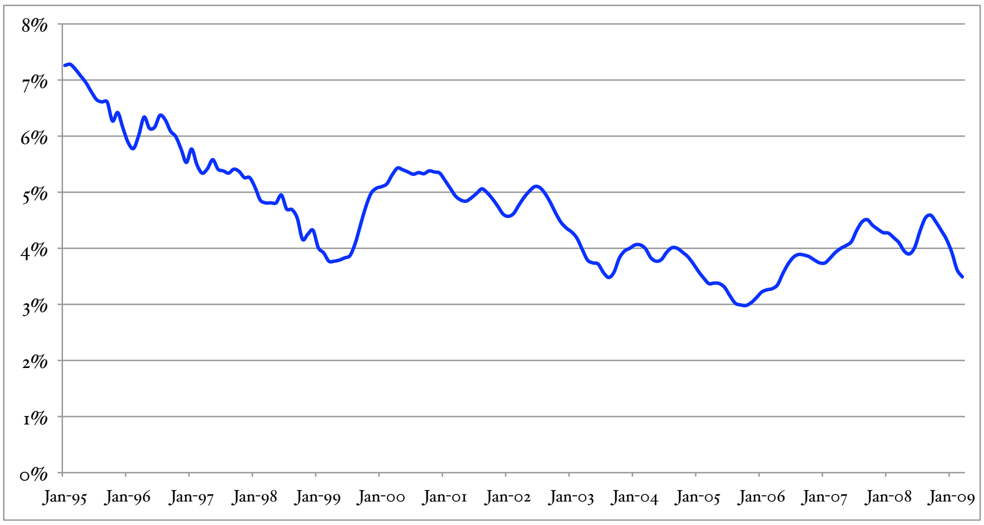
Overrentewinstdeling

u-rendement

De overrentewinstdeling is op basis van een externe objectieve maatstaf, het *u*-rendement. Binnen de Nederlandse levensverzekeringsmarkt is dit een zeer gebruikelijke maatstaf, maar ook winstdelingen gekoppeld aan het *s* of *t*-rendement komen voor.

Het *u*-rendement is het gemiddelde rendement van een geselecteerd pakket staatsleningen met resterende looptijden van twee tot vijftien jaar. In bijlage 1 staat de volledige definitie van het *u*-rendement.

In *Grafiek 1* staan de *u*-rendementen vanaf 1995.



Grafiek 1: Verloop u-rendementen vanaf januari 1995.

Methode

Jaarlijks wordt het meerdere tussen het *u*-rendement en de rekenrente *i* plus een afslag *a* als winstdeling uitgekeerd. Basis voor de winstdeling is de nettovoorziening aan het eind van het polisjaar. De winstdeling wordt niet contant uitgekeerd maar gebruikt als koopsom voor het inkopen van een extra stukje kapitaal.

In de praktijk zijn er diverse varianten voor de berekening van het winstkapitaal. De belangrijkste verschilpunten betreffen de voorziening en de bepaling van overrente.

Als basis voor de winstdeling wordt vaak een gemiddelde voorziening genomen. Omdat de premies, en daarmee de opbouw van het belegde vermogen, gedurende het polisjaar binnenkomen, is het niet juist om uit te gaan van de ultimo voorziening.

Omdat de voorziening ook aangroeit door de rekenrente *i*, wordt de (gemiddelde) voorziening ook wel eerst verdisconteerd met *i* en daarna opgerent met *u* om het interestoverschot te bepalen. De formule is dan bijvoorbeeld [(1+*u*-*a*)/(1+*i*) -1]**Voorziening*.

Hier houden we het simpel. De voorziening die als basis dient voor de winstdeling is de voorziening ultimo het polisjaar, en het interestoverschot is *u*-*i*-*a*. Het winstdelingskapitaal ΔK_t wordt als volgt bepaald.

$$\Delta K_t = \frac{{}_tV^{netto} \cdot \mathrm{Max}\left[u_t - i - a\,;0\right]}{\bar{\mathrm{A}}_{x+t\,\overline{n-t|}}}$$

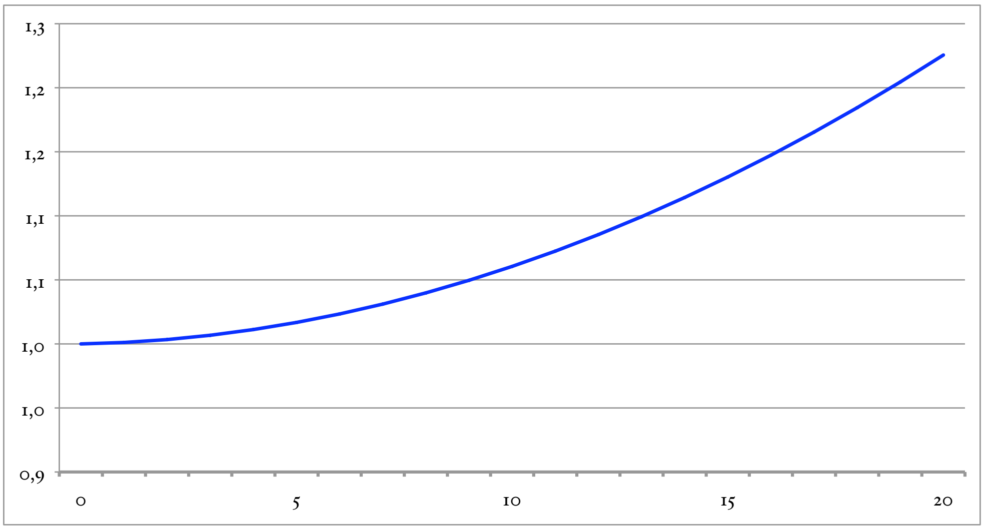
Hierin is ${}_tV^{netto} = K_t\bar{\mathrm{A}}_{x+t\,\overline{n-t|}} - P^{netto}\ddot{a}_{x+t\,\overline{n-t|}}$ en K_t het kapitaal op tijdstip *t* inclusief de winstdelingen over de jaren 1 tot en met *t*-1.

VOORBEELD

Als voorbeeld nemen we een gemengde verzekering met de volgende gegevens. De verzekerde is een man van 40 jaar oud, de looptijd is 20 jaar, overlevingstafel GBM 1995-2000, rekenrente 3%, *u*-rendement gehele looptijd 5% en de afslag *a* bedraagt 0,25%.

Voor *K*=1 geldt: $P^{netto} = \dfrac{K\bar{\mathrm{A}}_{40\,\overline{20|}}}{\ddot{a}_{40\,\overline{20|}}} = \dfrac{0{,}564246}{14{,}987949} = 0{,}037647$.

In *Grafiek 2* en in *Tabel 1* wordt het verloop van het kapitaal nog eens schematisch en cijfermatig weergegeven.



Grafiek 2: Ontwikkeling kapitaal gemengde verzekering bij een u-rendement van 5%.

Tabel 1: Verloop kapitaal van een gemengde verzekering bij u-rendement van 5%.

Looptijd	$\bar{A}_{x+t\,\overline{n-t\rceil}}$	$\ddot{a}_{x+t\,\overline{n-t\rceil}}$	${}_tV^{netto}$	ΔK_t	K_t
0	0,564246	14,987949	0,000000		1,000000
1	0,580610	14,426319	0,037507	0,001130	1,001130
2	0,597419	13,849316	0,076714	0,002247	1,003378
3	0,614700	13,256057	0,117730	0,003352	1,006729
4	0,632455	12,646404	0,160616	0,004444	1,011174
5	0,650706	12,019650	0,205477	0,005526	1,016700
6	0,669463	11,375410	0,252397	0,006598	1,023297
7	0,688752	10,712764	0,301499	0,007661	1,030958
8	0,708593	10,031065	0,352894	0,008715	1,039673
9	0,729003	9,329660	0,406695	0,009763	1,049436
10	0,749997	8,608018	0,463011	0,010804	1,060240
11	0,771609	7,864976	0,522000	0,011839	1,072079
12	0,793861	7,099716	0,583801	0,012869	1,084948
13	0,816800	6,310642	0,648611	0,013897	1,098845
14	0,840451	5,496842	0,716587	0,014921	1,113765
15	0,864852	4,656952	0,787924	0,015943	1,129709
16	0,890054	3,789235	0,862850	0,016965	1,146674
17	0,916104	2,891984	0,941600	0,017987	1,164661
18	0,943063	1,963075	1,024446	0,019010	1,183671
19	0,971002	1,000000	1,111701	0,020036	1,203707
20	1,000000	0,000000	1,203707	0,021065	1,224772

Optie

Deze verzekering met overrentewinstdeling bevat een optie. Deze optie bestaat uit de minimale rekenrente van 3%. Immers als het *u*-rendement lager is dan 3% wordt er nog steeds 3% toegevoegd aan de voorziening.

Indien deze garantie niet gegeven wordt kan de maatschappij in theorie de premies beleggen in het mandje met staatsleningen waarvan het *u*-rendement is afgeleid en dus hetzelfde rendement realiseren als wat aan de polishouder is toegezegd. De maatschappij loopt dan in principe geen beleggingsrisico. In de praktijk kan er niet een perfecte match gemaakt worden omdat het *u*-rendement is afgeleid van een aantal deel-*u*-rendementen uit voorgaande perioden (zie bijlage). Daarnaast speelt nog een tijdseffect en een volume-effect.
Met tijdseffect wordt bedoeld dat een premie niet altijd ontvangen wordt op het moment dat

die premie verschuldigd is. Een ander tijdseffect, met wellicht een grotere invloed, is de kans op verval door sterfte, afkoop of royement. Dit zijn onzekere factoren en zullen van te voren ingeschat moeten worden en meegenomen moeten worden in de beleggingsstrategie.
Met het volume-effect wordt bedoeld dat niet voor elke polis een belegging wordt aangegaan omdat dat administratief bijna niet te doen is, en bovendien erg kostbaar is. Daarom worden beleggingsafspraken gebundeld. Een perfecte match wordt in de praktijk dus niet gerealiseerd.

Eigenlijk is de garantie niet 3% maar 3¼% omdat de afslag a , in dit geval ¼% en bedoeld als extra interestmarge voor de maatschappij, ook gegarandeerd wordt.

Dit voorbeeld bevat 20 opties (voor elk polisjaar een) welke allemaal in de volgende vorm geschreven kunnen worden.

$$\mathrm{Max}\left[u_t - (i + a)\,;0\right] \cdot {}_tV^{netto}$$

Vaak wordt ten onrechte gedacht dat een gegarandeerde rekenrente altijd een optie-element bevat, maar dat is niet zo. Een verzekering zonder overrentewinstdeling maar met een rekenrentegarantie bevat geen optie-element. Immers bij het afsluiten van de polis kan de verzekeraar dit risico volledig afdekken (*hedgen*) met swaps. Als de verzekeringsmaatschappij voor elke kasstroom een swap aangaat waarbij zij de variabele rente betaalt en een vaste rente (minimaal de rekenrente) ontvangt kan zij de rekenrente volledig afdekken. Ook hier geldt dat je dit in theorie kunt afdekken, maar in de praktijk niet haalbaar is om dezelfde redenen (volume- en tijdseffecten) als hiervoor genoemd.

Waardebepaling winstdelingsoptie

Deze optie kan berekend worden met de formule van Black[4]. Omdat het *u*-rendement volgens een ingewikkelde methode van randvoorwaarden en middelingen maandelijks wordt vastgesteld is dit voor de optieberekeningen niet praktisch. Er blijkt een goede benadering te zijn voor het (deel) *u*-rendement, en dat is een swap met een looptijd van 7 jaar[5]. Alvorens in te gaan op de formule van Black zal eerst worden uitgelegd wat precies een forward, zero rente, swap en een swaption is.

---

[4] Fischer Jeffrey Black, 1938-1995.

[5] Zie artikel Richard Plat, "Analytische waardering van opties op *u*-rendement".

Forward en zero rente, swap en swaptions

Forward en zero rente

Een zero rente is de rente op een zero coupon lening. De rente op een lening zonder couponbetalingen. Op de einddatum wordt de hoofdsom inclusief de gecumuleerde rente in een keer afgelost. Het jaarlijkse rendement wat bij een dergelijke belegging hoort noemen we het zero rendement. De waarde van een dergelijke belegging met een hoofdsom van 1 en een looptijd van t is gelijk aan $(1+ z_t)^{-t}$.

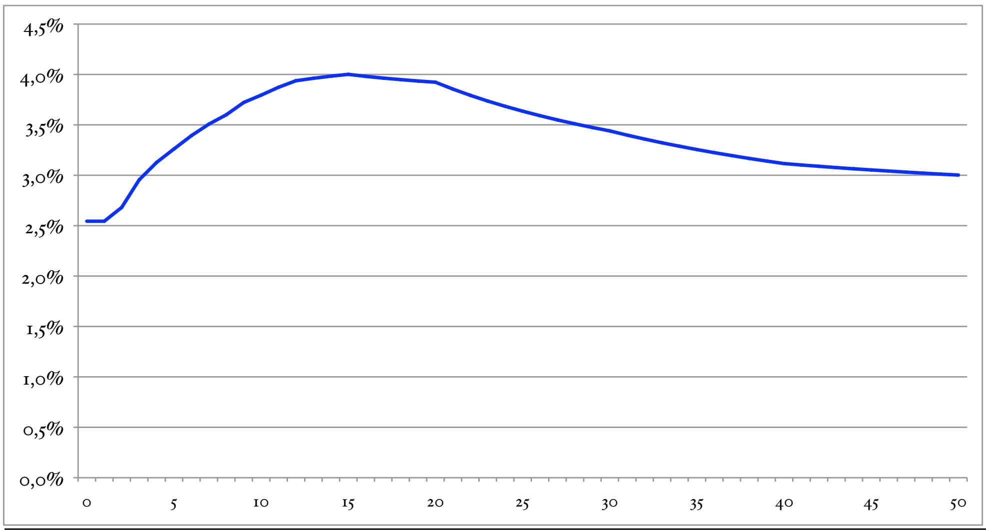
Een forward (zero) rente is een rente die van toepassing is voor een bepaalde periode in de toekomst welke afgeleid is van de zero rentes van vandaag.
Stel dat de zero rente voor 2 jaar 4% is en de zero rente voor 1 jaar is 3%, dan is de forward in het tweede jaar 5,001% omdat $1{,}03 * 1{,}05001 = 1{,}04^2$.

De forward rente die geldt na een periode k voor een looptijd l geven we aan met $f_{k,l}$. De zero rente voor een periode t geven we aan met z_t. Het verband tussen een forward en zero rente is gedefinieerd als:

$$\underset{k+l=t}{\forall} (1+z_t)^t = (1+z_k)^k (1+f_{k,l})^l$$

Voor de eenvoud gaan we uit van jaarlijkse rendementen en dat k, l en dus ook t gehele getallen zijn. Verder maken we gebruik van de zero yieldcurve van De Nederlandse Bank (DNB) die maandelijks wordt gepubliceerd en door verzekeraars en pensioenfondsen gebruikt worden om marktwaarden en toereikendheidstoetsen mee te berekenen. In het vervolg maken we gebruik van de DNB-curve per 31 december 2008. Deze is in bijlage 2 opgenomen.

Een grafische weergave van deze yieldcurve per 31 december 2008 wordt getoond in *Grafiek 3*.



Grafiek 3: Zero yieldcurve DNB per 31 december 2008.

Swap

Een swap is niets anders dan, zoals het woord al doet vermoeden, een ruil. In de financiële wereld een ruil tussen een vaste en een variabele rente. Twee partijen maken de afspraak dat de ene partij een vaste rente over een fictieve hoofdsom betaalt en een variabele rente op die fictieve hoofdsom ontvangt. De andere partij ontvangt dan de vaste rente en betaalt de variabele. Welke variabele rente dit is wordt in de overeenkomst vastgelegd. Dit kan bijvoorbeeld de 3-maands Euribor zijn.
Op het moment van aangaan van de overeenkomst wordt de vaste rente zodanig vastgesteld dat de waarde van de swap op dat moment nihil is. De contante waarde van de vaste rentestromen is gelijk aan de contante waarde van de variabele rentestromen.

Voorbeeld

De vaste rentebetalingen op een ineens aflosbare lening ter grootte van y aan het einde van elke jaar worden contant gemaakt met de bijbehorende zero rente. De hoofdsom wordt aan het eind van het vijfde jaar afgelost en met de 5 jaars zero rente contant gemaakt. De som van de contante waarde van deze rentebetalingen en de contante waarde van de hoofdsom is gelijk aan aan de waarde van een ineens aflosbare lening met een variabele rente, welke gelijk is aan 1.

Dit leidt tot de volgende gelijkheid, waaruit y kan worden opgelost.

$$y\left[(1+z_1)^{-1}+(1+z_2)^{-2}+(1+z_3)^{-3}+(1+z_4)^{-4}+(1+z_5)^{-5}\right]+(1+z_5)^{-5}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1-(1+z_5)^{-5}}{(1+z_1)^{-1}+(1+z_2)^{-2}+(1+z_3)^{-3}+(1+z_4)^{-4}+(1+z_5)^{-5}}=\frac{1-(1+z_5)^{-5}}{\sum_{t=1}^{5}(1+z_t)^{-t}}$$

Uitgaande van de zero rentes van DNB (zie bijlage 2) is de rente voor een 5 jarige swap gelijk aan

$$y=\frac{1-(1{,}0326)^{-5}}{(1{,}0254)^{-1}+(1{,}0268)^{-2}+(1{,}0295)^{-3}+(1{,}0313)^{-4}+(1{,}0326)^{-5}}=3{,}24\% \ .$$

In de praktijk is de werkwijze net andersom. De zero curve wordt geconstrueerd vanuit de swaprentes.

Swaption

Een swaption is een optie op een (toekomstige) swap. Van te voren wordt de vaste rente afgesproken waartegen de swap kan worden aangegaan. De houder van de swaption kan na afloop van de optieperiode beslissen of hij gebruik maakt van de optie om de swap aan te gaan of niet. Redelijkerwijs zal hij dit doen als hem dit financieel voordeel oplevert. In optietermen: als de swaption *in the money* is.

Voorbeeld

Als voorbeeld gebruiken we wederom een swap met een looptijd van 5 jaar, maar deze kan pas na 3 jaar worden uitgeoefend. Dit is een swaption met een optieperiode van 3 jaar en een looptijd van 5 jaar. De techniek is hierbij hetzelfde als bij een swap. Ook hier wordt de vaste rente, in dit geval vanaf tijdstip 3, en de hoofdsom met zero rentes contant gemaakt en gelijkgesteld aan 1. Het grote verschil is dat we nu de toekomstige zero rentes (forward zero rentes) moeten nemen. De formule wordt nu:

$$y\left[(1+f_{3,1})^{-1}+(1+f_{3,2})^{-2}+(1+f_{3,3})^{-3}+(1+f_{3,4})^{-4}+(1+f_{3,5})^{-5}\right]+(1+f_{3,5})^{-5}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1-(1+f_{3,5})^{-5}}{(1+f_{3,1})^{-1}+(1+f_{3,2})^{-2}+(1+f_{3,3})^{-3}+(1+f_{3,4})^{-4}+(1+f_{3,5})^{-5}}=\frac{1-(1+f_{3,5})^{-5}}{\sum_{t=1}^{5}(1+f_{3,t})^{-t}} \quad \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1-\dfrac{(1+z_8)^{-8}}{(1+z_3)^{-3}}}{\sum_{t=1}^{5}\dfrac{(1+z_{3+t})^{-(t+3)}}{(1+z_3)^{-3}}}=\frac{(1+z_3)^{-3}-(1+z_8)^{-8}}{\sum_{t=1}^{5}(1+z_{3+t})^{-(t+3)}}$$

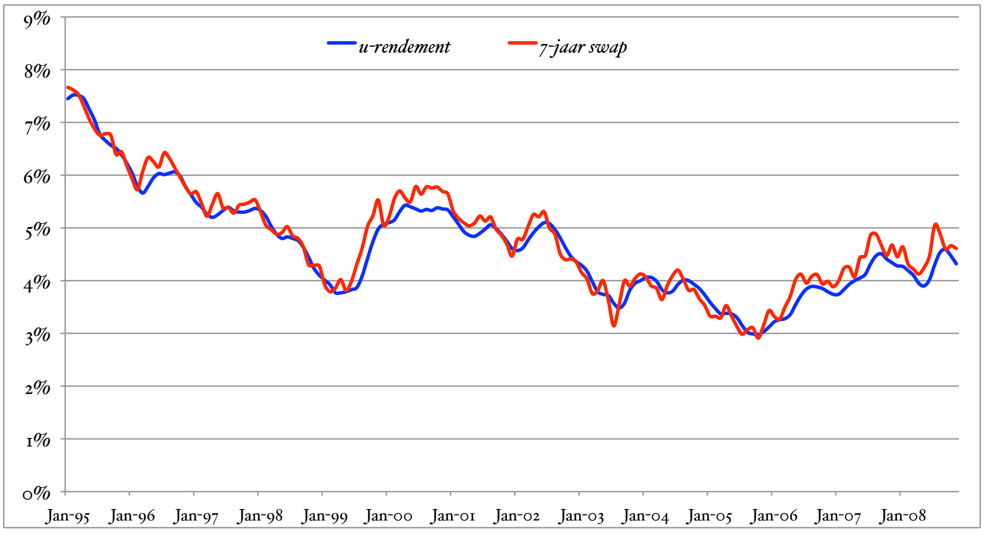
Benadering *u*-rendement met 7 jaars swaprente

Uit historische gegevens[6] blijkt dat het deel-*u*-rendement heel goed te benaderen is met een 7 jaars swaprente. Het *u*-rendement[7] is het gemiddelde van de zes deel-*u*-rendementen van afgelopen 6 halve maanden en zal daarom minder goed aansluiten bij de 7 jaars swaprente. Desalniettemin gaan we er van uit dat deze 7 jaars swaprente een goede benadering is voor het *u*-rendement. De kleine afwijkingen tussen de 7 jaars swaprente en het *u*-rendement kunnen bekostigd worden uit de opslag *a* die in het tarief zit.

---

[6] Zie bijvoorbeeld het artikel van Richard Plat en de volgende grafieken.

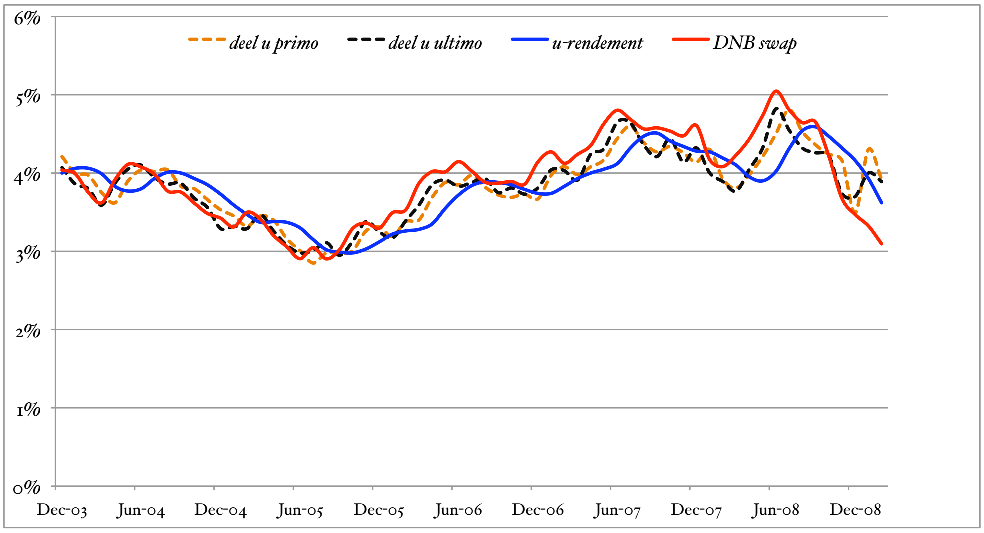
[7] Historische gegevens en definities van het (deel)-u-rendement kunnen gevonden worden op de site van *Het Verbond van Verzekeraars*. www.verzekeraars.nl.



Grafiek 4: Vergelijking u-rendement met 7 jaars swap.

In *Grafiek 4* is een vergelijking gemaakt tussen het *u*-rendement en de 7 jaars swaprente. Deze gegevens zijn onttrokken aan de eerder genoemde notitie van Richard Plat. De 7 jaars swaprente is door Richard gehaald uit Bloomberg[8] en is in de grafiek twee weken verschoven om een goede aansluiting te kunnen maken.

Bloomberg is een financiële dienst waarvoor betaald moet worden. Ik heb zelf geen toegang tot Bloomberg, ook zakelijk niet, maar dat is niet erg. De DNB swap curve is een goede benadering. Daarom heb ik nog een vergelijking gemaakt tussen de 7 jaars swaprentes afgeleid van de DNB zero curve, de deel-*u*-rendementen en de *u*-rendementen. De DNB zero curven zijn te downloaden van de site van De Nederlandse Bank en zijn vanaf eind 2003 per maand beschikbaar.

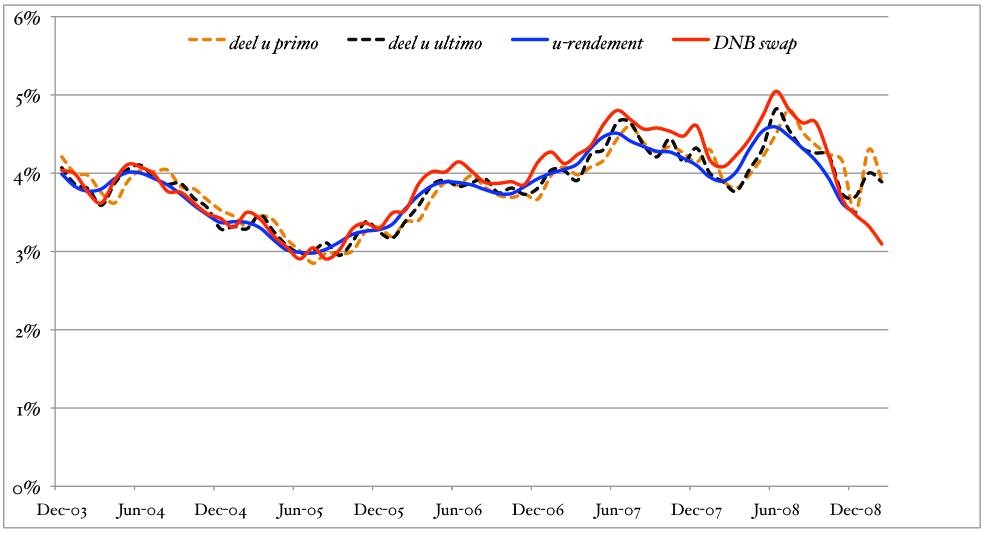


Grafiek 5a: Vergelijking DNB swap met (deel)-u-rendementen.

[8] Een Bloomberg Terminal is een computersysteem dat beoefenaars op de financiële markt toegang geeft tot realtime financiële gegevens zoals beurskoersen en financieel nieuws.

In *Grafiek 5a* geven de gestippelde lijnen de deel-*u*-rendementen weer. De okerkleurige het deel-*u*-rendement aan het begin van de maand en de zwarte het deel-*u*-rendement aan het eind van de maand.

Uit *Grafiek 5a* blijkt dat de deel-*u*-rendementen aansluiten bij de 7 jaars swaprente, en dat het deel-u-rendement aan het einde van de maand de beste fit geeft. Het laatste jaar wordt de fit minder goed, maar dat heeft misschien te maken met de onrust op de financiële markten. De aansluiting met het *u*-rendement is minder mooi, maar dat komt ook omdat het *u*-rendement een gemiddelde is van zes voorgaande deel-*u*-rendementen. In de praktijk zal een overrente-winstdeling vaak gekoppeld zijn aan een (voortschrijdend) gemiddeld rendement. Afhankelijk van de precieze methodiek kan een tijdsverschuiving ingebouwd worden om zodoende een betere aansluiting te krijgen tussen het rendement dat ten grondslag ligt aan de overrentewinstdeling en de 7 jaars swaprente.
Als in *Grafiek 5a* bijvoorbeeld het *u*-rendement 3 maanden naar links wordt verschoven is de aansluiting al een stuk beter. De deel-*u*-rendementen en de DNB swap op tijdstip *t* worden vergeleken met het *u*-rendement op tijdstip *t+3 maanden*. Deze tijdsverschuiving wordt getoond in *Grafiek 5b*.



Grafiek 5b: Vergelijking DNB swap met (deel)-u-rendementen. Met u-rendement 3 maanden verschoven.

In de verdere uitwerking veronderstellen we dat dat de 7 jaars swaprente, afgeleid van de DNB zero curven, een goede benadering is voor het *u*-rendement. In de verdere berekeningen zou je heel eenvoudig een tijdsverschuiving van 3 maanden mee kunnen nemen. De benadering van het *u*-rendement op tijdstip *t* is dan niet de 7 jaars swaprente op tijdstip *t*, maar de 7 jaars swaprente op tijdstip *t+3/12*. Het effect zal klein zijn. De grootste afwijking zal ontstaan wanneer het geschatte *u*-rendement over de hele looptijd dalend of juist stijgend is. In die gevallen is de 7 jaars swaprente structureel een te hoge of een te lage schatting voor het *u*-rendement.

Wanneer het *u*-rendement afwisselend een stijgende of dalende trend laat zien, zullen de over- en onderschattingen elkaar deels opheffen.

FORMULE VAN BLACK

Met de formule van van Black[9] kunnen de prijzen van interestderivaten worden vastgesteld. Omwille van de eenvoud veronderstellen we eerst dat de winstdeling in contanten wordt uitgekeerd in plaats van een extra kapitaal.

De contante waarde van de winstdelingsoptie in jaar t op tijdstip t=0 is:

$$WD_{0,t}^{optie} = (1 + z_t)^{-t} \cdot {}_t\mathrm{p}_x \cdot \left[F_t \Phi(d_1) - R_t \Phi(d_2) \right] \cdot {}_tV^{netto} \text{ , met}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{F_t}{R_t}) + \frac{\sigma_t^2 t}{2}}{\sigma_t \sqrt{t}} \text{ en } d_2 = d_1 - \sigma_t \sqrt{t}$$

Hierbij is $\Phi(x)$ de cumulatieve standaard normale verdeling, F_t de 7 jaars forward rente R_t de strike price $(i+a)$, z_t de zero rente en σ de volatiliteit van de forward swaprente. De kosten van de winstdelingsoptie in jaar jaar t worden zowel contant gemaakt met interest als met de overlevingskans. Immers de optie wordt alleen uitgeoefend mits de verzekerde nog in levens is. De nettovoorziening (${}_tV^{netto}$) is de voorziening die als maatstaf geldt voor het toekennen van de winstdeling. Omwille van de eenvoud is verondersteld dat de winstdeling in contanten wordt uitgekeerd. De nettovoorziening is dan de nettovoorziening uitgerekend op basis van het oorspronkelijke kapitaal, dus exclusief de winstkapitalen uit voorgaande jaren. In de verdere uitwerking gaan we die winstkapitalen wel meenemen. De nettovoorziening is dan inclusief de reeds opgebouwde winstkapitalen over de jaren voor t.
Voor de formule van de kosten van de winstdeling in jaar t maakt het niet uit hoe de voorziening precies gedefinieerd is, voor de uitkomst uiteraard wel.

VARIANTIE

Alle invoerparameters in Black's formule zijn waarneembaar in de markt, behalve de volatiliteit van de swaptions. Prijzen van swaptions worden daarom in de markt genoteerd in zogenaamde *implied volatilities*. Deze volatiliteiten zijn alleen afhankelijk van de looptijd van de swap en de looptijd van de swaption. Uiteraard is de volatiliteit ook afhankelijk van de marktomstandigheden. In de huidige economische en financiële crisis zal de volatiliteit op swaptions hoger zijn dan in perioden van relatieve rust in de financiële wereld.
Zoals gezegd heb ik geen toegang tot Bloomberg om actuele *implied volatilities* uit de markt te halen, maar dat is voor deze uitwerking niet van belang. We zijn op zoek naar een praktische

[9] Zie John C. Hull, hoofdstuk 26

uitwerking van van de winstdelingsoptie en de prijsbepalende factoren daarbij. Ongetwijfeld is de volatiliteit een belangrijke factor.
Binnen elk groot verzekeringsconcern zullen de beleggingsafdelingen toegang hebben tot dergelijke marktprijzen. Een actuele waarde voor de parameter σ mag voor de verdere berekening geen probleem zijn.
Op de site van de Duitse bank West LB (zie bijlage 3 voor het internetadres) worden actuele prijzen gegeven van swaptions. In de volgende paragraaf wordt uitgelegd hoe de volatiliteit van swaptions herleid kan worden.

De volatiliteiten worden vaak genoteerd in een zogenaamde *implied volatility cube*. De drie assen van de kubus zijn: de looptijd van de optie, de looptijd van de swap (in het Engels aangeduid met *tenor*) en de *stike price*. Uit deze laatste blijkt dan in hoeverre de optie *in, at* of *out of the money* is.

In *Tabel 2a* is een voorbeeld gegeven van een dergelijke kubus Het is geen kubus meer, maar een matrix omdat dit volatiliteiten zijn voor swaptions die *at the money* zijn. De volatiliteiten zijn hier in procenten genoteerd.

Tabel 2a: Voorbeeld volatiliteitskubus voor at the money swaptions (σ in %).

	Looptijd Swap (in jaren)													
Looptijd Swaption	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1 maand	15,3	15,5	15,9	16,3	16,6	16,3	15,9	15,4	15,0	14,5	13,7	13,2	13,0	12,9
3 maand	15,6	15,6	15,8	16,2	16,4	15,9	15,5	15,1	14,7	14,4	13,6	13,1	12,8	12,5
6 maand	15,7	15,9	15,9	16,1	16,0	15,7	15,3	14,9	14,6	14,3	13,4	12,9	12,6	12,4
1 jaar	16,3	16,0	15,9	15,8	15,7	15,4	15,0	14,7	14,5	14,2	13,3	12,7	12,4	12,2
2 jaar	16,1	16,0	15,8	15,5	15,1	14,9	14,6	14,3	14,1	13,8	12,9	12,5	12,1	11,9
3 jaar	16,3	16,0	15,7	15,3	14,8	14,5	14,2	14,0	13,7	13,5	12,7	12,2	11,9	11,7
4 jaar	16,0	15,6	15,2	14,8	14,4	14,2	13,9	13,6	13,4	13,2	12,5	12,0	11,7	11,5
5 jaar	15,5	15,1	14,7	14,4	14,0	13,7	13,5	13,0	13,1	12,9	12,2	11,8	11,5	11,3
7 jaar	14,3	14,1	13,7	13,3	13,1	12,9	12,7	12,5	12,4	12,3	11,7	11,3	11,0	10,8
10 jaar	13,1	12,9	12,6	12,3	12,1	11,9	11,8	11,7	11,6	11,5	11,0	10,6	10,3	10,0
15 jaar	11,9	11,9	11,6	11,3	11,1	11,0	10,9	10,8	10,7	10,7	10,2	9,7	9,5	9,4

Herleiding volatiliteit uit swaption notering

Hull geeft in hoofdstuk 26.4 (formule 26.15) aan hoe de prijs van een swaption berekend kan worden. Uitgaande van een hoofdsom van L=1, en jaarlijkse rentebetalingen, is deze formule te schrijven als

$$P^{swaption} = \sum_{t=1+T}^{n+T} (1+z_t)^{-t} \left[s_0 \Phi(d_1) - s_K \Phi(d_2) \right], \text{ waarbij}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{s_0}{s_K}) + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{en } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$ en T is de looptijd van de swaption, z_t de zero rente en n is de looptijd van de swap.

Voor *at the money swaptions* is de forward swaprente (s_0) gelijk aan de strike price (s_K), dus s_0=s_K. Dan volgt dat $d_1 = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$ en $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} = -d_1$ Omdat geldt $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ is de volatiliteit als volgt te bepalen.

$$\sigma = \Phi^{-1}\left[\left(\frac{P^{swaption}}{s_K \sum_{t=1+T}^{n+T}(1+z_t)^{-t}} + 1\right)\cdot\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{2}{\sqrt{T}}$$

Voor een swaption met een looptijd van 3 jaar en een looptijd van de swap van 6 jaar is de volatiliteit.

$$\sigma = \Phi^{-1}\left[\left(\frac{0{,}03035}{0{,}04515\cdot 4{,}856082} + 1\right)\cdot\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \Phi^{-1}\left[0{,}569213\right]\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 0{,}201345$$

De prijzen op de site van West LB voor forward swaps en at-the-money swaptions zijn gegeven in een aankoop- en een verkoopprijs. In bovenstaande berekening is het gemiddelde genomen van de aan- en verkoopprijzen.
Op de site van West LB en ook in de bijlage zijn de tabellen getransponeerd. De Vorlaufzeit is de looptijd van de optie (swaption) en Swaplaufzeit is de looptijd van de swap.

In de *Tabel 2b* is de volatiliteit uitgewerkt van de actuele prijzen op 2 juni 2009 volgens de West LB bank.

Tabel 2a: Volatiliteiten per 2 juni 2009 West LB (σ in %).

	Looptijd Swap (in jaren)									
Looptijd Swaption	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 jaar	46,1	36,1	31,7	29,5	28,1	27,4	27,0	26,9	27,2	
2 jaar	29,7	26,4	24,7	23,7	23,2	23,0	22,9	23,1		
3 jaar	22,9	21,6	20,8	20,4	20,2	20,1	20,3			
4 jaar	20,0	19,0	18,7	18,5	18,5	18,5				
5 jaar	17,8	17,4	17,2	17,2	17,3					

Opvallend is de hoge volatiliteit voor swaps met een korte looptijd. De verwachtingen van de korte rente alsmede de verschuivingen in de rentecurve op korte termijn zijn blijkbaar erg onzeker.

Omdat de zero rentes voor looptijden langer dan 10 jaar niet gegeven zijn kunnen de volatiliteiten van swaptions waarvan de som van de looptijd van de swap en de looptijd van de swaption groter is dan 10 jaar niet uitgerekend worden.

Convexiteitscorrectie
Bij de waardebepaling van de winstdelingsoptie hebben we aangenomen dat het (deel) u-rendement benaderd kan worden met een 7 jaars swaprente. Echter bij de uitoefening van de optie wordt in een keer afgerekend en wordt niet gedurende zeven jaar een vaste rente geruild tegen een variabele. Er is sprake van een eenmalige afrekening in plaats van gedurende zeven jaar een onzekere kasstroom ter grootte van het verschil tussen de vaste en de variabele rente. De eerste van de zeven betalingen is niet onzeker omdat de variabele rente op dat moment bekend is, maar de volgende zes variabele rentebetalingen zijn dat wel.
Dit leidt er toe dat we een correctie moeten toepassen op de forward rente. Een convexiteitscorrectie. Hiervoor zijn meerdere methoden beschikbaar. Twee ervan worden behandeld. De methode volgens Hull[10] en de methode volgens Pelsser[11].

Convexiteitscorrectie volgens Hull
De methode van Hull leidt tot de volgende convexiteitscorrectie. Hierbij is gebruikt gemaakt van een Taylor reeks benadering.

$$F_t^{cc} = F_t - 0{,}5 \cdot (F_t)^2 \sigma_t^2 t \frac{G''(F_t)}{G'(F_t)}$$

Hierin zijn F_t en F_t^{cc} respectievelijk de forward rentes voor en na de convexiteitscorrectie. $G'(y)$ en $G''(y)$ zijn de eerste respectievelijk de tweede afgeleide van $G(y)$. Met de functie $G(y)$ wordt de waarde weergegeven van een ineens aflosbare lening met een couponrente gelijk aan x.
Verder veronderstellen we bij de waardering van $G(y)$ dat de zero curve vlak is, met zero rentes ter grootte van y.
Deze benadering mogen we toepassen omdat de waarde van een swap met een looptijd van n jaar gelijk is aan een ineens aflosbare lening met met een looptijd van n jaar en een couponrente gelijk aan de swaprente. De waarde van beide financiële instrumenten is gelijk aan 1.

---

[10] Zie John C. Hull, hoofdstuk 27.

[11] Zie Antoon Pelsser, “Mathematical Foundation of Convexity Correction”

Voor een swap met een looptijd van 7 jaar zijn de bijbehorende functie $G(y)$ en haar eerste en twee afgeleide:

$$G(y) = \frac{x}{\sum_{t=1}^{6}(1+y)^t} + \frac{1+x}{(1+y)^7}$$

$$G'(y) = \sum_{t=1}^{6}\frac{-tx}{(1+y)^{t+1}} + \frac{-7(1+x)}{(1+y)^8} =$$
$$= -x(1+y)^{-2} - 2x(1+y)^{-3} - 3x(1+y)^{-4} - 4x(1+y)^{-5} - 5x(1+y)^{-6} - 6x(1+y)^{-7} - 7(1+x)(1+y)^{-8}$$

$$G''(y) = \sum_{t=1}^{6}\frac{t(1+t)x}{(1+y)^{t+2}} + \frac{-7\cdot -8(1+x)}{(1+y)^9} =$$
$$= 2x(1+y)^{-3} + 6x(1+y)^{-4} + 12x(1+y)^{-5} + 20x(1+y)^{-6} + 30x(1+y)^{-7} + 42x(1+y)^{-8} + 56(1+x)(1+y)^{-9}$$

Convexiteitscorrectie volgens Pelsser

De methode van Pelsser leidt tot de volgende convexiteitscorrectie.

$F_t^{cc} = F_t\left(\frac{A + B_t F_t e^{\sigma_t^2 t}}{A + B_t F_t}\right)$, waarbij $A = \frac{1}{l}$ en l is de looptijd van de swap in jaren.

$$B_t = \left(\frac{(1+z_t)^{-t}}{\sum_{s=1}^{l}(1+z_{t+s})^{-(t+s)}} - A\right)\frac{1}{F_t}$$

Voorbeeld Convexiteitscorrecties

Van beide methoden wordt een voorbeeld uitgewerkt. Hierbij maken we gebruik van de yieldcurve van DNB per 31 december 2008. We veronderstellen een rentevolatiliteit σ van 12,5%. Na 15 jaar is de forward swaprente F_t=3,376%.

Volgens methode Hull geeft dit als gecorrigeerde forward swap:

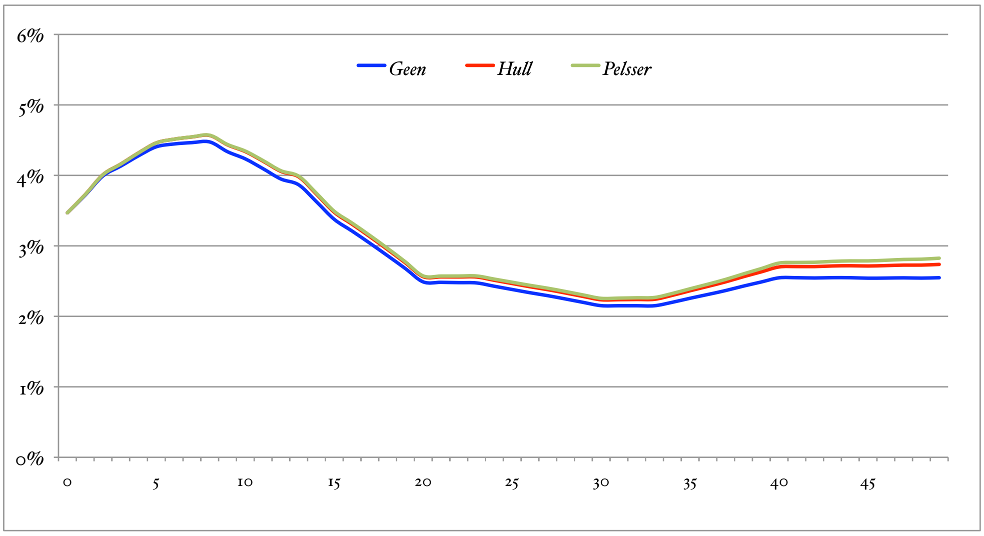
$$F_t^{cc} = 0{,}03376 - 0{,}5\cdot(0{,}03376)^2 0{,}125^2\cdot 15\cdot\frac{-6{,}1429}{45{,}9611} = 3{,}476\%\ ,$$

en volgens de methode Pelsser:

Met $B_t = \left(\frac{0,555184}{3,386136} - \frac{1}{7} \right) \frac{1}{0,033762} = 0,62499$ volgt:

$$F_t^{cc} = 0,03376 \cdot \left(\frac{1/7 + 0,62499 \cdot 0,03376 \cdot e^{0,125^2 \cdot 15}}{1/7 + 0,62499 \cdot 0,03376} \right) = 3,491\%$$

De correctie volgens de methode van Pelsser geeft een iets hogere forward swaprente dan die volgens de methode van Hull. In de *Grafiek 6* zijn de gecorrigeerde en de ongecorrigeerde 7 jaars forward rentes weergegeven. Opvallend, doch niet onverwacht, is dat de verschillen in de toekomst verder oplopen.



Grafiek 6: Vergelijking tussen gecorrigeerde en ongecorrigeerde forward swaprentes.

VOORBEELD UITWERKING WINSTDELINGSOPTIE

Met de gegevens uit *Tabel 1* is te berekenen dat de voorziening aan het eind van het 15e jaar op basis van het oorspronkelijk kapitaal gelijk is aan 0,689534. De waarde van de winstdelingsoptie aan het eind van het 15e jaar wordt dan als volgt berekend.
Bij de berekening wordt de convexiteitscorrectie volgens methode Hull toegepast.

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{F_t^{cc}}{R_t}) + \frac{\sigma_t^2 t}{2}}{\sigma_t \sqrt{t}} = \frac{\ln(\frac{0,03476}{0,0325}) + \frac{0,125^2 \cdot 15}{2}}{0,125\sqrt{15}} = 0,38093 \text{ en}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_t \sqrt{t} = 0,38093 - 0,125\sqrt{15} = -0,10320\ .$$

$$WD_{0,15}^{optie} = (1 + z_{15})^{-15} \cdot {}_{15}p_{40} \cdot \left[F_{15}^{cc}\Phi(d_1) - R_{15}\Phi(d_2) \right] \cdot {}_{15}V^{netto} =$$

$$(1 + 0,04001)^{-15} \cdot 0,95671 \cdot \left[0,03476\Phi(0,38093) - 0,0325\Phi(-0,10320) \right] \cdot 0,689534 = 0,0027919$$

Intrinsieke waarde en tijdswaarde van optie

In voorgaand voorbeeld zijn de kosten van de totale overrentewinstdeling in jaar 15 uitgerekend. Interessanter is het om alleen naar de tijdswaarde van de optie kijken. Dit wordt vaak met de Engelse afkorting TVOG (=Time Value of Options en Guarantees) aangeduid. De optiewaarde is dan te splitsen in een intrinsiek deel en een tijdswaarde-effect.
Het intrinsieke deel is de overrentewinstdeling die in het deterministische geval uitgekeerd zou worden. In ons voorbeeld de overrentewinstdeling afgeleid van het *u*-rendementen benaderd met de 7 jaars swaprente inclusief een convexiteitscorrectie. In een klassieke deterministische winstgevendheidsberekening (ook wel *profit test* genoemd) werd een bepaald verondersteld verloop van het *u*-rendement meegenomen. Op deze manier werd altijd een zeker bate, ter grootte van afslag *a*, ingecalculeerd. Binnen het deterministische denkkader was deze winstgevendheidsberekening correct, mits het *u*-rendement hoger bleef dan *i+a*.

Het tijdseffect van de optie geven we aan als het verschil tussen de totale overrente volgens de optieformule en de overrente in het deterministische geval. In het rekenvoorbeeld.

$$\left[F_{15}^{cc}\Phi(d_1) - R_{15}\Phi(d_2) \right] - (F_{15}^{cc} - R_{15}) =$$
$$0,03476\Phi(0,38093) - 0,0325\Phi(-0,10320) - (0,03476 - 0,0325) =$$
$$0,00763 - 0,00226 = 0,00537$$

Voor de hele verzekering bedragen de extra kosten voor dit tijdswaarde-effect van de overrentewinstdeling.

$$TWD_{[o,n]} = \sum_{t=1}^{n} (1 + z_t)^{-t} \cdot {}_t p_x \cdot \left(\left[F_t^{cc}\Phi(d_1) - R_t\Phi(d_2) \right] - \mathrm{Max}\left[\left(F_t^{cc} - R_t \right); 0 \right] \right) \cdot {}_t V^{netto}$$

De opslag op de jaarlijkse premie is.

$$P^{TWD} = \frac{TWD_{[o,n]}}{\ddot{a}_{x\,\overline{n|}}}$$

De nettovoorziening (${}_tV^{netto}$) is de voorziening op basis van het oorspronkelijke kapitaal, dus exclusief winstdelingen uit de voorgaande t-1 jaar.

OPTIE OP OPTIE

De formules en voorbeelden die tot nu toe getoond zijn gingen uit van een winstdeling in contanten. De basis voor de winstdeling was immers de nettovoorziening op basis van het oorspronkelijke kapitaal. In de praktijk is het echter gebruikelijker om winstdeling niet in contanten uit te keren, maar het verzekerd bedrag te verhogen. Deze verhogingen delen dan ook weer mee in de overrentewinstdeling. Op deze manier ontstaat winstdeling op winstdeling en ook optie op optie. Hierdoor worden de totale kosten voor de winstdeling ook groter, en de formules iets anders. De tijdswaarde van de optie voor de hele verzekering is dan.

$$TWD_{[0,n]}^{stoch} = \sum_{t=1}^{n} (1 + z_t)^{-t} \cdot {}_t\mathrm{p}_x \cdot \left(\left[F_t^{cc} \Phi(d_1) - R_t \Phi(d_2) \right] \cdot {}_tV^{netto\_stoch} - \mathrm{Max}\left[\left(F_t^{cc} - R_t \right); 0 \right] \cdot {}_tV^{netto\_det} \right)$$

In deze formule komen twee nettovoorzieningen voor, een stochastische en een deterministische. Met de stochastische voorziening wordt bedoeld dat de kapitaalverhogingen zijn afgeleid van de totale kosten van de optie. In de deterministische voorziening zijn de kapitaalverhogingen afgeleid van de deterministische berekening van toekomstige u-rendementen. Onderstaande formules geven de twee verschillende kapitaalverhogingen weer.

$$\Delta K_t^{det} = \frac{\mathrm{Max}\left[\left(F_t^{cc} - R_t \right); 0 \right] \cdot {}_tV^{netto\_det}}{\bar{\mathrm{A}}_{x+t\,\overline{n-t|}}}, \text{ en}$$

$$\Delta K_t^{stoch} = \frac{\left[F_t^{cc} \Phi(d_1) - R_t \Phi(d_2) \right] \cdot {}_tV^{netto\_stoch}}{\bar{\mathrm{A}}_{x+t\,\overline{n-t|}}}$$

In ${}_tV^{netto\_det}$ is $K_t^{det} = \sum_{s=1}^{t-1} \Delta K_s^{det}$, en in ${}_tV^{netto\_stoch}$ is $K_t^{stoch} = \sum_{s=1}^{t-1} \Delta K_s^{stoch}$

De opslag op de jaarlijkse premie is.

$$P^{TWD} = \frac{TWD_{[0,n]}^{stoch}}{\ddot{\mathrm{a}}_{x\,\overline{n|}}}$$

Gevoeligheidsanalyse en benadering winstdelingsoptie

In de vorige paragrafen is uitgelegd dat overrentewinstdeling volgens het *u*-rendement een financiële optie is, en dat de kostprijs van deze optie met een analytische formule berekend kan worden. Verder is uitgelegd dat de optie gesplitst kan worden in een intrinsiek deel en een tijdseffect. Daarna zijn de formules uitgebreid met wat in de praktijk heel gebruikelijk is, namelijk winstdeling over reeds opgebouwde winstkapitalen. Hierdoor ontstaan optiecomponenten op een optie.
In deze paragraaf wordt onderzocht welke parameters het grootste effect hebben op de tijdswaarde van de winstdelingsoptie, en er wordt onderzocht of er, eventueel binnen bepaalde grenzen, een benaderingsformule is voor de bepaling van de tijdswaarde van deze optie. Alvorens deze gevoeligheden te onderzoeken worden de formules nog even samengevat.

Het tijdswaarde-effect van de overrentewinstdeling ("winst-op-winst") voor een gemengde verzekering met leeftijd *x* en looptijd *n* wordt aangeduid met TWD^{stoch} en is gelijk aan.

$$TWD_{[0,n]}^{stoch} = \sum_{t=1}^{n} (1+z_t)^{-t} \cdot {}_t\mathrm{p}_x \cdot \left(\left[F_t^{cc}\Phi(d_1) - R_t\Phi(d_2) \right] \cdot {}_tV^{netto\_stoch} - \mathrm{Max}\left[\left(F_t^{cc} - R_t \right); 0 \right] \cdot {}_tV^{netto\_det} \right),$$

waarbij $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{F_t^{cc}}{R_t}\right) + \dfrac{\sigma_t^2 t}{2}}{\sigma_t\sqrt{t}}$ en $d_2 = d_1 - \sigma_t\sqrt{t}$

De nettovoorzieningen (${}_tV^{netto\_stoch}$ en ${}_tV^{netto\_det}$) zijn de stochastische respectievelijk de deterministische voorziening.
F_t^{cc} is de forward swaprente inclusief een correctie voor convexiteit en R_t is de strike price.

Deze strike price is gelijk aan de rekenrente vermeerderd met de afslag, dus *i+a*.

De opslag op de jaarlijkse premie is.

$$P^{TWD} = \frac{TWD_{[0,n]}^{stoch}}{\ddot{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

Deze opslag kunnen we ook uitdrukken in een *factor* van de nettopremie. Deze *factor* is gelijk aan.

$$factor = \frac{P^{TWD}}{P^{netto}}$$

Hierna wordt onderzocht welke parameters het meeste effect hebben op deze *factor*.

Gevoeligheid

In de gevoeligheidsanalyse is onderzocht wat de bepalende parameters zijn voor de hoogte van de *factor* en in welke mate de *factor* wijzigt indien een van de parameters wijzigt. Onderzocht zijn de parameters leeftijd, looptijd, sterftetafel, methode convexiteitscorrectie, yieldcurve en volatiliteit.

In de volgende twee tabellen is voor verschillende combinaties van leeftijd en looptijd de hoogte van de *factor* bepaald. In *Tabel 3* is een convexiteitscorrectie volgens de methode van Hull toegepast en in *Tabel 4* is de convexiteitscorrectie volgens de methode van Pelsser gebruikt. In beide tabellen is uitgegaan van de swaprente afgeleid van de zero yieldcurve van DNB per 31 december 2008 en een volatiliteit van 12,5%. De gebruikte overlevingstafel is GBM 1995-2000.

Tabel 3: Convexiteitscorrectie volgens Hull

	Looptijd (in jaren)				
Leeftijd	10	20	30	40	50
20	0,69%	3,81%	5,85%	9,11%	14,22%
30	0,69%	3,77%	5,67%	8,33%	11,40%
40	0,68%	3,61%	5,14%	6,58%	7,37%
50	0,65%	3,20%	3,99%	4,22%	4,23%
60	0,59%	2,30%	2,34%	2,30%	2,30%

Tabel 4: Convexiteitscorrectie volgens Pelsser

	Looptijd (in jaren)				
Leeftijd	10	20	30	40	50
20	0,69%	3,83%	5,93%	9,34%	14,82%
30	0,68%	3,78%	5,75%	8,54%	11,84%
40	0,68%	3,62%	5,20%	6,72%	7,58%
50	0,65%	3,21%	4,04%	4,28%	4,31%
60	0,59%	2,31%	2,36%	2,32%	2,32%

Uit de tabellen blijkt dat de methode van convexiteitscorrectie weinig effect heeft op de hoogte van de *factor*. Duidelijk is dat hoe langer de looptijd hoe hoger de *factor*. Bij hoge leeftijden zwakt dit effect sterk af omdat de kans dat de verzekerde de einddatum haalt en de opties die ver in de toekomst liggen kan uitoefenen steeds kleiner wordt.
De convexiteitscorrectie volgens Pelsser geeft een hogere waarde voor *factor* dan de correctiemethode volgens Hull omdat de forward rente inclusief de convexiteitscorrectie bij de methode van Pelsser groter is dan die bij de methode van Hull.

Een andere overlevingstafel heeft ook nauwelijks effect. Een oudere overlevingstafel (met grotere sterftekansen) geeft zoals verwacht een iets lagere *factor*.

In de *Tabel 5* is de hoogte van de *factor* bepaald door te variëren met zero yieldcurve en de volatiliteit. De zero rentes en de volatiliteiten zijn dan wel vlak gedurende de gehele looptijd van de verzekering.

Tabel 5: Gevoeligheid zero rentes en volatiliteit. Verzekerde is een 40 jarige man, looptijd 20 jaar. convexiteitscorrectie volgens Hull.

	Zero rente (Gehele looptijd vlak)									
Volatiliteit	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	DNB	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%
5%	0,01%	0,23%	1,35%	1,38%	0,77%	0,42%	0,12%	0,03%	0,01%	0,00%
10%	0,56%	1,75%	3,87%	3,68%	2,54%	2,21%	1,32%	0,80%	0,48%	0,30%
12,5%	1,17%	2,80%	5,26%	4,86%	3,61%	3,29%	2,24%	1,53%	1,06%	0,74%
15%	1,93%	3,97%	6,72%	6,05%	4,75%	4,43%	3,26%	2,42%	1,82%	1,37%
20%	3,80%	6,55%	9,83%	8,48%	7,18%	6,82%	5,53%	4,52%	3,73%	3,09%
25%	5,99%	9,41%	12,64%	10,98%	9,74%	9,36%	8,04%	6,96%	6,07%	5,32%
30%	8,42%	12,53%	15,26%	13,58%	12,40%	12,06%	10,79%	9,72%	8,81%	8,04%
35%	11,05%	15,92%	17,87%	16,33%	15,16%	14,97%	13,82%	12,85%	12,02%	11,31%
40%	13,85%	19,55%	20,56%	19,25%	18,03%	18,12%	17,19%	16,42%	15,78%	15,26%

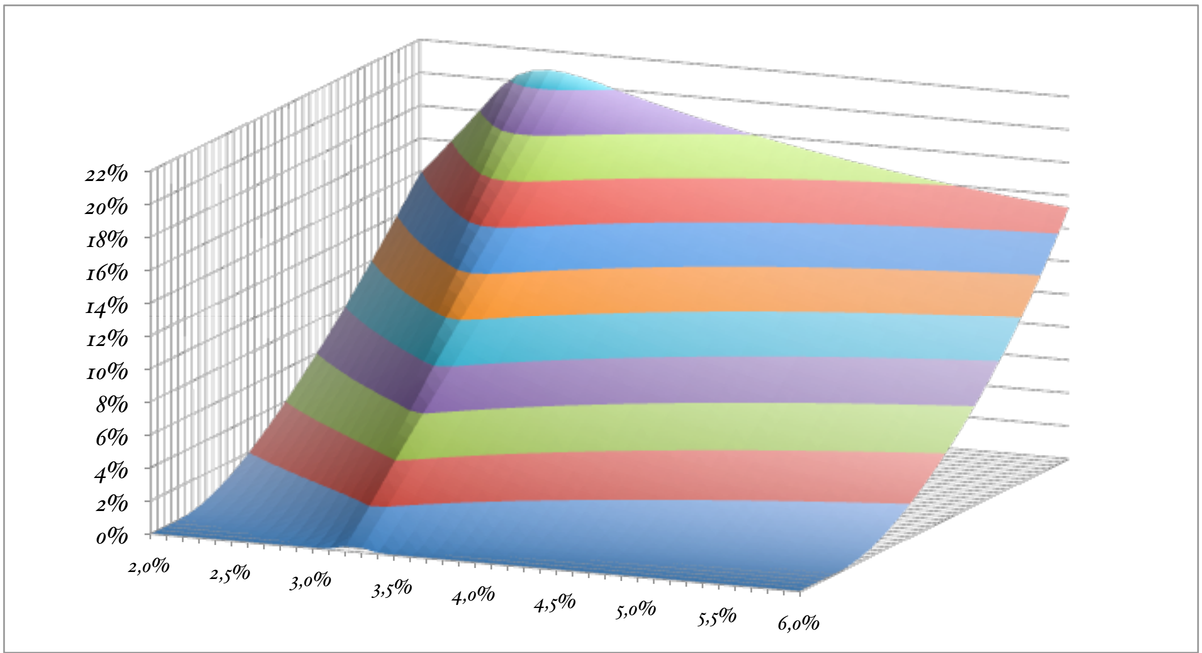
Zoals misschien verwacht is de *factor* erg gevoelig voor zowel de rente, en dus het daarvan afgeleide *u*-rendement, als de volatiliteit. Echter de gevoeligheid voor de volatiliteit van de swaption is veel groter. Bij een verdubbeling van de volatiliteit van 12,5% naar 25% bij 5% zero rente stijgt de factor van 1,53% naar 6,96%, meer dan een verviervoudiging.

Bij het variëren van de zero rentes is de *factor* het grootst rond de 3,0%. Nadere bestudering van de cijfers leert dat de *factor* het grootst is voor zero rentes net iets onder de strike price van 3,25%. Bij een grote volatiliteit wordt dit maximum van de *factor* bij een lagere rente bereikt dan bij een kleine volatiliteit. Bij een volatiliteit van 10% is de *factor* het grootst bij een zero rente van 3,20% en bij een volatiliteit van 30% is de *factor* al maximaal bij een zero rente van 2,88%.

Bij lage rentes is de optie heel sterk *in the money* en is de tijdswaarde gering. Bij hele hoge rentes is de optie heel sterk *out of the money*. Ook dan is de tijdswaarde minimaal. De tijdswaarde is het grootst als de optie *at the money* is. De tijdswaarde loopt verder op met een toename van de volatiliteit.

In *Grafiek 7* worden de cijfers uit *Tabel 5* met meerdere tussenstappen getoond. Duidelijk is dat het maximum van de *factor* verschuift met het wijzigen van de volatiliteit.

Op de horizontale as staat de zero rente, op de verticale as de hoogte van de *factor* en op de diepte as de volatiliteit.



Grafiek 7: De factor in relatie tot de zero rente en de volatiliteit.

BENADERING NOODZAKELIJK?

Uit de gevoeligheidsanalyse blijkt dat dat de winstdelingsoptie varieert met de leeftijd en de looptijd, en dat het effect op de looptijd afneemt bij hoge leeftijd. Beter is het om te concluderen dat de optie afhangt van de 'duration' van de verzekering, die je zou kunnen definiëren als tijdelijke gemiddelde levensduur:

$$\bar{e}_{x\,\overline{n|}} = \frac{\left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x + \sum_{t=1}^{n} {}_t p_x\right)}{2} .$$

Verder blijkt dat de optie sterk afhankelijk is van de zero rente en de volatiliteit. Een simpele redelijk nauwkeurige benaderingsformule is mijns inziens niet te maken en is ook niet nodig. De hier beschreven methode is voor iedere actuaris gemakkelijk te programmeren of op te zetten in een spreadsheet. Bedrijfsspecifieke kenmerken van de overrentewinstdeling van de spaarproducten kunnen dan naar eigen inzicht gemodelleerd worden.
Met een dergelijk stukje gereedschap kan de actuaris heel snel beoordelen welke risico's de verzekeringsmaatschappij loopt en een inschatting maken van de kostprijs van dat risico. Ook be-

langrijk is om te weten hoe snel de prijs van het optierisico verandert door veranderende marktomstandigheden, zoals bijvoorbeeld een dalende rente of een stijgende volatiliteit. De kosten kunnen, zoals o.a. blijkt uit *Tabel 5*, heel snel stijgen.

Afdekken van het optierisico

We hebben gezien dat de kosten van de winstdelingsoptie sterk kunnen oplopen bij dalende rentestanden en/of stijgende volatiliteiten. Bij de marktintroductie van nieuwe of gewijzigde producten dient overwogen te worden of het niet beter is om dit risico af te dekken (te *hedgen*). Er zijn in de markt diverse partijen bereid om dit risico over te nemen. Uiteraard zal deze prijs wel iets hoger zijn dan de hier berekende prijs omdat de tegenpartij ook risico loopt en er zeker ook iets aan wil verdienen, maar desalniettemin zeker een overweging waard. Dit risico op de hedge kan flink in de papieren lopen wanneer de gerealiseerde volatiliteit (fors) groter is dan de implied volatility die bij het aangaan van de hedge was verondersteld. Vandaar dat de tegenpartij een grote opslag voor dit risico zal incalculeren.

Overigens speelt de keus om een risico wel of niet af te dekken niet alleen bij een marktintroductie of bij een tariefaanpassing, maar vereist continue aandacht.

Ook aan het afdekken van risico's kleven risico's. De tegenpartij waar het risico is ondergebracht kan failliet gaan (*default risk*). Dat dit risico niet nihil is heeft de huidige kredietcrisis al pijnlijk bewezen.

Slotopmerkingen

In deze scriptie zijn de kosten van de overrentewinstdeling op basis van het *u*-rendement van een gemengde verzekering uitgewerkt. Zonder al te veel aanpassingen kan dit ook worden toegepast op andere spaarproducten zoals een zuivere verzekering bij leven of een verzekering bij leven met restitutie van de betaalde premies. Ook zal het weinig problemen opleveren om dit toe te passen op spaarverzekeringen tegen koopsom. Zelfs voor risicoverzekeringen kunnen deze formules worden toegepast. Echter een risicoverzekering met overrentewinstdeling is zeldzaam.

De kostenopslagen zijn op nul gesteld. In de praktijk is er altijd sprake van een brutopremie en een nettopremie. Voor de gemengde verzekering of de verzekering bij leven zal dit weinig uitmaken, maar bij de verzekering bij leven met restitutie worden de brutopremies gerestitueerd. Deze premies maken deel uit van de voorziening, en als die totale voorziening gebruikt wordt als maatstaf voor de overrentewinstdeling dan worden de kosten voor de winstdelingsoptie wel iets anders.

Ook dient gerealiseerd te worden dat de *factor* die hiervoor berekend is, een opslag is op de nettopremie. Wanneer de kosten worden uitgedrukt in de brutopremie resulteert dit in een lagere *factor*.

Een ander punt wat nog niet aan de orde is geweest, zijn de tweede orde grondslagen. Bij een winstgevendheidsberekening of andere kasstroomprojecties[12] worden tweede orde grondslagen gebruikt. Dit zijn (punt)schattingen van o.a. de toekomstige sterftekansen en vervalkansen. Deze sterftekansen zijn vaak niet gelijk aan de sterftekansen die in het tarief zitten. Ook is het zeer ongebruikelijk om in de bruto- en nettopremies al vervalkansen te verdisconteren.
Bij de berekening van de kosten van de winstdelingsoptie is de tariefsterfte toegepast en is er geen verval meegenomen.

De optiekosten, berekend op deze (hoogstwaarschijnlijk lagere) tweede orde sterftegrondslagen en rekening houdend met verval, zullen dan lager zijn.

[12] Bijvoorbeeld European Embedded Value (EEV) of Market Consistent Embedded Value (MCEV).

Bijlage 1. Definitie *u*-rendement.

Aangepaste definitie per 1 juni 2001

1. Het u-rendement wordt maandelijks vastgesteld op basis van het effectieve rendement van alle guldens- en euro-obligatieleningen die uitgegeven zijn door de Staat der Nederlanden en voldoen aan elk van de volgende eisen:
   a. de lening is toegelaten tot de definitieve notering van de Officiële Prijscourant van Euronext Amsterdam;
   b. de lening is niet vervroegd aflosbaar;
   c. de gemiddelde resterende looptijd van de lening ligt tussen 2 en 15 jaar;
   d. de omvang van de (restant hoofdsom van de) lening bedraagt tot 1 januari 2001 minimaal *f* 500 miljoen.
   e. de omvang van de (restant hoofdsom van de) lening bedraagt vanaf 1 januari 2001 minimaal 225 miljoen euro.

   De toetsing van de leningen aan de omvangseis, zoals omschreven onder d resp. e, vindt ultimo elk kalenderjaar plaats.
2. Het u-rendement is het gemiddelde van zes deel-u-rendementen. Een deel-*u*-rendement wordt 2 maal per maand vastgesteld en wel per de 15e en ultimo van de maand. Ter bepaling van een deel-*u*-rendement wordt uitgegaan van de op de genoemde data laatst bekende effectieve rendementen van elke lening, zoals gepubliceerd in de Officiële Prijscourant.

   Een deel-*u*-rendement is gelijk aan de som van:
   a. 10 % van het rekenkundig gemiddelde van de medianen van de effectieve rendementen van alle leningen met een gemiddelde resterende looptijd van 2-3 jaar, 3-4 jaar en 4-5 jaar,
   b. 65 % van het rekenkundig gemiddelde van de medianen van de effectieve rendementen van alle leningen met een gemiddelde resterende looptijd van 5-6 jaar, 6-7 jaar, 7-8 jaar, 8-9 jaar en 9-10 jaar,
   c. 25 % van de mediaan van de effectieve rendementen van alle leningen met een gemiddelde resterende looptijd van 10-15 jaar.
3. Zodra het deel-*u*-rendement per de 15e van een maand bepaald is, wordt ook het voor de volgende kalendermaand geldende *u*-rendement vastgesteld als het gemiddelde van de zes laatst bekende deel-*u*-rendementen.

Bijlage 2. DNB curve per 31 december 2008

In onderstaande tabel de zero rentes van de eerste 30 jaar van de DNB curve per 31 december 2008 aangevuld met de 7 jaars forward swaprentes.

Jaar	Zero	7 jaars forward swaprente
0	2,544%	3,469%
1	2,544%	3,719%
2	2,681%	3,992%
3	2,954%	4,132%
4	3,127%	4,278%
5	3,261%	4,406%
6	3,393%	4,446%
7	3,507%	4,465%
8	3,600%	4,475%
9	3,722%	4,336%
10	3,795%	4,234%
11	3,873%	4,095%
12	3,938%	3,949%
13	3,962%	3,866%
14	3,983%	3,626%
15	4,001%	3,376%
16	3,981%	3,210%
17	3,964%	3,038%
18	3,949%	2,860%
19	3,935%	2,677%
20	3,923%	2,488%
21	3,855%	2,483%
22	3,793%	2,478%
23	3,736%	2,474%
24	3,684%	2,427%
25	3,636%	2,381%
26	3,591%	2,335%
27	3,549%	2,293%
28	3,510%	2,246%
29	3,474%	2,198%
30	3,440%	2,152%

Bijlage 3. Forward en swaprentes West LB

Op de site van de Duitse bank West LB kunnen actuele tarieven gevonden worden van at-the-money swaptions.

Onderstaande tabellen zijn te vinden via de link:
http://www.westlbmarkets.net/cms/sitecontent/ib/investmentbankinginternet/de/services/new_swapindikationen.standard

De volatiliteit van de swaptions kunnen berekend worden uit onderstaande tabellen.

6M Forwards

Letzte Aktualisierung: 02.06.2009 08:06

Datum	Zero-Satz	Diskontfaktor	6-M-Forward
04-12-09	1.488	0.99256	1.395
04-06-10	1.452	0.98561	1.746
06-06-11	1.747	0.96578	2.822
04-06-12	2.199	0.93676	3.552
04-06-13	2.607	0.90212	3.994
04-06-14	2.934	0.86529	4.345
04-06-15	3.209	0.82730	4.490
06-06-16	3.425	0.78976	4.652
05-06-17	3.603	0.75324	4.759
04-06-18	3.753	0.71775	4.810
04-06-19	3.877	0.68358	4.932

Forward Swaps

Die Tabelle zeigt Preis-Indikationen für Forward-Swaps unterschiedlicher Vorlauf- und Swaplaufzeiten. Pro Laufzeiten-Kombination gibt es zwei quotierte Zinssätze. Den ersten Zinssatz empfangen Sie von der WestLB AG und Sie zahlen 6-M-Euribor, den zweiten Zinssatz zahlen Sie an die WestLB und empfangen 6-M-Euribor.

Letzte Aktualisierung: 02.06.2009 08:06

Vorlauf	1M	3M	6M	1J	2J	3J	4J	5J
Swap								
1J	1.41-1.46	1.46-1.51	1.57-1.62	2.02-2.07	3.09-3.14	3.82-3.87	4.23-4.28	4.57-4.62
2J	1.76-1.81	1.87-1.92	2.06-2.11	2.54-2.59	3.45-3.50	4.02-4.07	4.40-4.45	4.63-4.68
3J	2.21-2.26	2.33-2.38	2.52-2.57	2.95-3.00	3.70-3.75	4.20-4.25	4.49-4.54	4.70-4.75
4J	2.60-2.65	2.71-2.76	2.88-2.93	3.25-3.30	3.90-3.95	4.31-4.36	4.57-4.62	4.75-4.80
5J	2.91-2.96	3.01-3.06	3.16-3.21	3.50-3.55	4.05-4.10	4.41-4.46	4.64-4.69	4.79-4.84
6J	3.16-3.21	3.25-3.30	3.38-3.43	3.68-3.73	4.17-4.22	4.49-4.54	4.69-4.74	4.84-4.89
7J	3.36-3.41	3.44-3.49	3.56-3.61	3.82-3.87	4.26-4.31	4.55-4.60	4.74-4.79	4.87-4.92
8J	3.52-3.57	3.59-3.64	3.70-3.75	3.94-3.99	4.34-4.39	4.61-4.66	4.78-4.83	4.91-4.96
9J	3.65-3.70	3.72-3.77	3.82-3.87	4.03-4.08	4.41-4.46	4.65-4.70	4.82-4.87	4.94-4.99
10J	3.76-3.81	3.82-3.87	3.92-3.97	4.12-4.17	4.46-4.51	4.70-4.75	4.85-4.90	4.95-5.00

At-the-Money Swaptions

Die Tabelle zeigt Preis-Indikationen für At-The-Money-Swaptions unterschiedlicher Vorlauf- und Swaplaufzeiten. Pro Laufzeiten-Kombination gibt es zwei quotierte Prämien (in Basispunkten). Sie verkaufen die Swaption in Höhe der ersten Prämie und kaufen die Swaption in Höhe der zweiten Prämie.

Letzte Aktualisierung: 02.06.2009 10:06 Uhr

Vorlaufzeit	1M	3M	6M	1J	2J	3J	4J	5J
Swaplaufzeit								
1J	08-aug	14-14	21-23	35-37	46-51	51-58	54-63	55-65
2J	19-20	32-34	46-49	67-73	89-100	99-113	104-122	106-126
3J	31-33	51-55	72-78	100-110	131-148	146-168	153-179	156-186
4J	44-47	71-77	99-107	134-148	173-196	191-221	201-236	206-245
5J	56-61	90-98	124-136	168-186	214-244	236-273	248-292	254-302
6J	68-74	110-121	151-167	202-225	257-292	281-326	295-347	301-357
7J	80-87	130-143	178-196	236-263	299-341	328-380	342-402	347-412
8J	91-100	150-165	205-226	271-303	343-390	374-433	388-455	393-466
9J	102-112	169-186	232-257	308-344	386-438	419-484	432-506	436-517
10J	113-124	188-207	261-288	345-385	429-487	466-538	477-558	478-566

BIBLIOGRAFIE

Björk, Thomas. "Arbitrage Theory in Continuous Time", second edition. New York: Oxford University Press. 2004.

Bodie, Zvi; Kane, Alex; Marcus, Alan J. "Investments", sixth edition. McGraw Hill. 2005.

Heer, dr. W.J.C de; Sattler, J. "Actuariële Wiskunde", derde druk. 's Gravenhage: Martinus Nijhoff. 1977.

Hull, John C. "Options, Futures and Other Derivatives", sixth edition. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

Mood, Alexander M.; Graybill, Franklin A.; Boes, Duane C. "Introduction to the Theory of Statistics", third edition. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1974.

Pelsser, Antoon. "Mathematical Foundation of Convexity Correction" Quantitative Finance Volume 3 (2003) 59-65.

Plat, Richard. "Analytische waardering van opties op het u-rendement". April 2007. http://www.aenorm.nl/artikelen/55-plat.pdf

Schouppe, Hugo. "Gestructureerd programmeren in Excel VBA", eerste druk. Den Haag. Academic Service. 2002